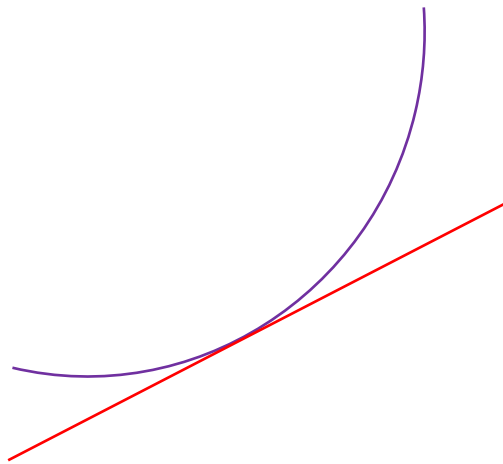


נתיב לאקדמיה



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1 (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לצפיה בשיעור חינם בעמוד הקורס: [חדו"א 1](#)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4	פרק 1 - קבוצות
9	פרק 2 - יחסים
14	פרק 3 - גבול של פונקציה
18	פרק 4 - רציפות ומשפט ערך הביניים
21	פרק 5 - סדרות: סדרות
37	פרק 6 - סדרות גוספות
40	פרק 7 - פונקציה ממשית
42	פרק 8 - משוואות מסוגים שונים

פרק 1 - קבוצות

(1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. (בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם).

את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה

(א) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cup B$.

(ב) אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$

(ג) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cap B$.

(ד) אם $x \notin A \cap B$ אז $x \notin A$

(ה) אם $x \notin A$ אז $x \notin A - B$

(ו) אם $x \notin A - B$ אז $x \notin A$

(ז) אם $x \in B$ אז $x \notin A - B$.

(ח) אם $x \notin A - B$ אז $x \in B$

(ט) $(A \subseteq B \wedge A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cap C$

(י) $(A \subseteq B \vee A \subseteq C) \Leftrightarrow A \subseteq B \cup C$

(יא) אם $A = A \cup B$ אז $A \subseteq B$

(יב) אם $A = A \cup B$ אז $B \subseteq A$

(יג) אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$

(יד) אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$

(טו) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$

(טז) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$ (יז)

(יח) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cap B$

(יט) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cap B$

(כ) $x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$

(כא) $x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$

_____ $\Leftrightarrow x \notin A - B$ (כב) השלם

(2) יהיו A, B, C קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

(א) אם $A = A - B$ אז $B = \emptyset$.

(ב) אם $A = A - B$ אז $A \cap B = \emptyset$.

(ג) אם $A = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

(ד) אם $B = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

(ה) אם $A \cap B = A$ אז $A = A \cup B$.

(ו) אם $A \cap B = B$ אז $A = A \cup B$.

(ז) אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$. (מבחן סמסטר קיץ תשס"ח, מועד ב')

(ח) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

(ט) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cap C)$

(י) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

(יא) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

(יב) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

(יג) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

$$(י) \quad A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C \quad \text{א.}$$

$$\text{ב.} \quad A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$$

(3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה.

במקום הטענה אם α אז β מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.

ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.

$$(א) \quad \text{אם } A \cap C = \emptyset \text{ אז } A - (B - C) \subseteq (A - B) - C$$

$$(ב) \quad \text{אם } A \subseteq B \text{ אז } (A - C) \cup (C - B) \subseteq A \cap B$$

$$(ג) \quad \text{אם } (A - C) \cap B = \emptyset \text{ אז } (A \cup B) - C \subseteq A - B$$

$$(ד) \quad \text{אם } B \subseteq A \text{ אז } (C - A) \cup (B - C) \subseteq A - B$$

$$(ה) \quad \text{אם } A \subseteq A \Delta B \text{ וגם } B - C = B \Delta C \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

$$(ו) \quad \text{אם } A \subseteq A \oplus B \text{ וגם } B - C \subseteq B \oplus C \text{ אז } A \cap C = \emptyset$$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

(4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

$$(א) \quad P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$$

$$(ב) \quad P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$$

$$(ג) \quad P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$$

$$(ד) \quad P(A) \cap A \neq \emptyset$$

$$(ה) \quad P(A) \cap A = \emptyset$$

(ו) אם $\{A\} \subseteq P(B)$ אז $P(A) \subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

(ז) אם $P(A) \subseteq P(A-B)$ אז $A \cap B = \emptyset$

(ח) אם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$ אז $(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)$ (שאלה קשה).

(5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. (נצטרך את זה גם ליחסים)

(א) $(A = B) \Leftrightarrow (A \times A = B \times B)$

(ב) $((B = \emptyset) \vee (A = \emptyset) \vee (A = B)) \Leftrightarrow (A \times B = B \times A)$

(ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות A, B, C, D מתקיים: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

(ד) אם $((A \times A) \cup (B \times B) = (C \times C))$ אז $((B \subseteq A) \vee (A \subseteq B)) \wedge (A \cup B \subseteq C)$

(ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות A, B, C, D מתקיים: $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.

(6) הוכיחו או הפריכו: תהינה A, B שתי קבוצות כלשהן ותהי $S \subseteq A \times B$ אז קיימות $C \subseteq A$

ו- $D \subseteq B$ כך ש- $S = C \times D$

(7) הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים: $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$

(8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות A, B, C שלושתן לא ריקות ושונות זו מזו

כך ש- $A \cup (B - C) \subseteq A \cap (B - C)$

(9) תהינה A, B, C קבוצות כלשהן. נתון $P(A) - P(B) = P(B) - \{\emptyset\}$ הוכח כי $B - A = B$

(10) הוכח כי אם $A \Delta B \subseteq A \Delta C$ אז $A \cap C \subseteq B$

(11) הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות A, B כך ש- $|A \times B| = 24$ וגם $|A \cap B| = 5$

(12) תהיינה A, B, C קבוצות כלשהן. נתון $A \cap B = \emptyset$ הוכח כי

$$(A \Delta C) \cup (B \Delta C) = A \cup B \cup C$$

(13) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות A, B, C $A \times (B \oplus C) = (A \times B) \oplus (A \times C)$

(14) תן דוגמא לקבוצה A שמקיימת $A \cap P(A) \cap P(P(A)) \neq \emptyset$

(15) לכל שלוש קבוצות A, B, C מתקיים: $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus (C \setminus B))$

פרק 2 - יחסים

(1) (חימום) רשום במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.

א. היחס R המוגדר מעל A באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow b > a + 3$ כאשר:

$$A = \{5, 6, 7\} \quad (ii) \quad A = \{3, 5, 19, 103\} \quad (ii) \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \quad (i)$$

(2) נתונים שני היחסים הבאים מעל $A = \{1, 2, 3\}$

$$R_1 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3)\} \quad R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (2, 1)\}$$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1, R_2, R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ קבע האם הוא רפלקסיבי, סימטרי,

טרנזיטיבי. (במקרה של הפרכה הבא דוגמה מתאימה)

(3) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשום שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמק מדוע הם ביחס. כתוב

שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמק מדוע אינם ביחס. כמו כן קבע האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי

רפלקסיבי, סימטרי, א"ס חלש, א"ס חזק, וטרנזיטיבי.

(א) יחס $@$ מעל \mathbb{Q} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in @ \Leftrightarrow |x - y| \leq 100$.

(ב) יחס \clubsuit מעל \mathbb{Q} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in \clubsuit \Leftrightarrow 3|x - y|$.

(ג) היחס \subseteq מעל $P(\mathbb{Q})$ המוגדר באופן הבא: $A \subseteq B \Leftrightarrow (A, B) \in \subseteq$.

(ד) היחס שרגא מעל \mathbb{Q} המוגדר באופן הבא: שרגא $(x, y) \in$ שרגא $x + y \geq x \cdot y$

(ה) יחס T מעל \mathbb{Q} המוגדר באופן הבא: $(x, y) \in T \Leftrightarrow x^2 + y \geq 1$

(4) מצא אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי רפלקסיביות, סימטריות, אנטי סימטריות חלשה,

אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות מקיים כל אחד מהיחסים הבאים. מעל הקבוצות

$$\mathbb{Q}, \mathbb{N}, A = \{3, 5, 7, 9\}$$

א. $xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} x = my$

ב. $xsy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{\text{even}} x = my$

$$xRy \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}_{\text{odd}} (x = my \vee y = mx) \quad \text{ג.}$$

(5) תהי A קבוצה ו- R יחס מעל A הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.
 בכל המקרים בהם בחרת להפריך תן דוגמה נגדית מינימלית. בדוק האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

- א. אם R סימטרי אז R טרנזיטיבי.
- ב. אם R אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.
- ג. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז R טרנזיטיבי.
- ד. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז $R = \emptyset$.
- ה. אם R סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק אז $R = \emptyset$.
- ו. אם R טרנזיטיבי וסימטרי אז R רפלקסיבי.
- ז. אם R טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי אז R אנטי סימטרי חזק.
- ח. אם R טרנזיטיבי ולא סימטרי אז R אנטי סימטרי חלש.

(6) תהי A קבוצה ויהיו R, S יחסים מעל A הוכח או הפרך את הטענות הבאות (הפרכה = דוגמה מינימלית)

- א. אם R, S רפלקסיבים אז $R \cap S$ רפלקסיבי.
- ב. אם R, S רפלקסיבים אז $R \cup S$ רפלקסיבי.
- ג. אם R, S סימטרים אז $R \cap S$ סימטרי.
- ד. אם R, S סימטרים אז $R \cup S$ סימטרי.
- ה. אם R, S טרנזיטיבים אז $R \cap S$ טרנזיטיבי.
- ו. אם R, S טרנזיטיבים אז $R \cup S$ טרנזיטיבי.
- ז. אם R, S יחסי שקילות אז $R \cap S$ יחס שקילות.
- ח. אם R, S יחסי שקילות אז $R \cup S$ יחס שקילות.
- ט. אם R, S אנטי סימטרים חלש אז $R \cap S$ אנטי סימטרי חלש.
- י. אם R, S אנטי סימטרים חלש אז $R \cup S$ אנטי סימטרי חלש.

(7) יהי R יחס סדר חלש מעל A ויהי S יחס סדר חלש מעל B . הוכח כי אם $A \cap B = \emptyset$ אז $R \cup S$ יחס סדר חלש מעל $A \cup B$.

(8) הוכח כי היחס R המוגדר מעל הקבוצה $A = \{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ע"י $aRb \Leftrightarrow a|b$ הוא יחס סדר מלא.

(9) נגדיר יחס R מעל הקבוצה $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ באופן הבא: $(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow (a \leq c \wedge b \leq d)$

א. הוכח כי R יחס סדר חלש שאינו מלא.

ב. מצא תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ שעליה היחס R הוא מלא.

(10) תהי $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ קבוצת כל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים.

ויהי $R \subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי: $(m_1, n_1)R(m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 - m_2 = n_1 - n_2$

א. הוכח כי R הינו יחס שקילות ב- A .

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות הבאות: $[(1,1)]_R, [(1,2)]_R, [(2,1)]_R$.

(11) יהי R יחס סימטרי וטרזיטיבי מעל A כך ש: $\forall a \in A \exists b \in A aRb$ הוכח כי R רפלקסיבי.

(12) נתון היחס R מעל \mathbb{N} . $xRy \Leftrightarrow (6 \mid x - y) \vee (3 \mid x \cdot y)$ (אין צורך להוכיח כי R יחס שקילות)

מצא את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

(13) נגדיר יחס בינארי E מעל $\mathbb{N} - \{0,1\}$ (קבוצת השלמים ללא 0 ו-1) באופן הבא: $aEb \Leftrightarrow ab \geq -1$

הוכח כי E יחס שקילות ותן תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

(14) תהי S קבוצה שאבריה הן קבוצות מגדירים יחס בינארי E מעל S באופן הבא:

$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Leftrightarrow AEB$ הוכיחו או הפריכו: E יחס שקילות.

(15) יחס R מעל A נקרא סוגר משולשים אם לכל $a, b, c \in A$ מתקיים: $(aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$

א. הוכח כי יחס רפלקסיבי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.

ב. הוכח כי אם R סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק אז R אינו אנטי רפלקסיבי.

(16) נגדיר יחס סדר (חלש) S מעל \mathbb{N} באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow \neg((\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor) \rightarrow y < x)$

אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר. כתוב במפורש את כל האיברים המינימלים של S .

תזכורת $x \in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר R אם $\forall y \in A ((y \neq x) \rightarrow \neg(yRx))$

(17) נגדיר יחס שקילות S מעל \mathbb{Q} באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x = y = 0) \vee (xy > 0)$

נגדיר יחס שקילות T מעל \mathbb{Q} באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2 - 9)S(y^2 - 9)$

אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות. כתוב במפורש את קבוצת המנה \mathbb{Q}/T ונמק בקצרה.

(18) נגדיר יחס בינארי D מעל הקבוצה $\mathbb{Q}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}\}$

באופן הבא: $(a_1, b_1)D(a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1 \geq a_2) \wedge (a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2)$

הוכח כי D יחס סדר חלש שאינו מלא.

(19) רשום במפורש את כל יחסי השקילות E מעל $S = \{a, b, c, d\}$ המקיימים $|S/E| = 2$ וכל מחלקות

השקילות הן שוות עוצמה. יש להציג כל יחס כחת קבוצה מפורשת של $S \times S$.

(20) יהיו R, S יחסי שקילות מעל A . הוכח כי $R \Delta S$ לא יחס שקילות מעל A .

(21) הוכח או הפרך: לכל קבוצה A ולכל יחס רפלקסיבי R מעל A קיימות קבוצות $B, C \subseteq A$ כך ש- $R = B \times C$

(22) יהי S יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה A . ונניח ש'יים $y \in A$

עבורו מתקיים: $\forall x \in A (x, y) \in S$ הוכח כי לכל $z \in A$ מתקיים: $(y, z) \notin S$

(23) יהי S יחס המוגדר מעל $P(\mathbb{Q})$ קבוצת החזקה של \mathbb{Q} באופן הבא: $\min A = \min B \Leftrightarrow ASB$

כאשר $\min A$ הוא המספר הקטן ביותר ב- A .

א. הוכח כי S הינו יחס שקילות.

ב. נסמן ב- K את קבוצת מחלקות השקילות של היחס S .

בנה פונקציה $F: K \rightarrow \mathbb{Q}$ חח"ע ועל.

פונקציות ויחסים משולב

(24) תהיינה A, B שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A, <_B$ שני יחסי סדר חזקים ומלאים (משווים) מעל A, B בהתאמה. ותהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה המקיימת אם $a_1 <_A a_2$ אז $f(a_1) <_B f(a_2)$. הוכח כי f חז"ע אך אינה בהכרח על.

(25) יחס T מעל \square מוגדר באופן הבא: $fTg \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f$ הוכח או הפרך: יחס שקילות

(26) תהי J קבוצת כל היחסים מעל A ו- E קבוצת כל יחסי השקילות מעל A .

נגדיר פונקציה $F: J \times E \rightarrow J$ באופן הבא: $F(R, S) = R \cap S$. הוכח כי F על.

(27) נגדיר יחס S על הקבוצה $\square \times \square$ באופן הבא: $(x_1, x_2)S(y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1^2 - x_2 = y_1^2 - y_2$

S יחס שקילות. (אין צורך להוכיח.) הוכח כי קבוצת המנה $\square \times \square / S$ שוות עוצמה לקבוצה \square

(28) תהי $F: A \rightarrow A$ פונקציה. נגדיר יחס R מעל A באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow f(a) = b$ נתון ש- R סימטרי

וטרנזיטיבי. הוכח כי F היא פונקצית הזהות.

(29) תהי A קבוצה לא ריקה ותהי A^A קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- A . מגדירים יחס E מעל A^A באופן הבא:

לכל $f, g \in A^A$ אם ורק אם קיימת $h \in A^A$ הפיכה כך ש- $f = h \circ g$.

א. הוכח כי E יחס שקילות.

ב. הי $c \in A$ כלשהוא. תהי $f_c: A \rightarrow A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת ע"י $f_c(x) = c \forall x \in A$ תאר את

מחלקת השקילות של f_c ביחס ל- E (תן תאור מפורש ככל הניתן.) נמק טענותיך.

(30) יהי היחס T המוגדר מעל הקבוצה \square באופן הבא: $fTg \Leftrightarrow$ קיים $x \in \square$ כך ש- $f(x) = g(x)$

האם T יחס שקילות?

(31) תהי A קבוצה סופית ותהי B תת קבוצה של A . נסמן ב- F את קבוצת כל הפונקציות מ- A ל- $\{0,1\}$.

נגדיר יחס E מעל F באופן הבא: $F = \{(f, g) \mid B \subseteq \{x \mid f(x) = g(x)\}\}$

א. בהנתן $A = \{1, 2, 3\}$ ו- $B = \{1, 2\}$ תנו דוגמא ל- $f, g, h \in F$ שונות כך ש- $(f, g) \in E, (f, h) \notin E$.

ב. הוכיחו כי E יחס שקילות.

ג. מה עוצמת קבוצת המנה F/E ? נמקו תשובתכם.

פרק 3 - גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x-3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x+1} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x-2} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} \quad (5) \\ & & & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad (9) \end{aligned}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5) \end{aligned}$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) & \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1) \\ \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) & \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9) \end{aligned}$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדוויץ'):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת):

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

(10) חשב על פי הגדרת הגבול את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \quad (5)$$

$$(8) \text{ הוכח על פי הגדרה את הגבול: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$$

הערה חשובה מאוד!

במרבית קורסי החזו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות:

									(1)
						40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
									(2)
$\frac{8}{17}$ (9	27 (8	3 (7	32 (6	-3 (5	$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1	
									(3)
	$-\frac{8}{3}$ (8	$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$\frac{-1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1	
									(4)
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1	
									(5)
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1	
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10	
									(6)
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1	
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10	
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19	
									(7)
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1	
									(8)
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1	
								0 (10	
									(9)
					-1 (5	1 (4	ϕ (3	ϕ (2	4 (1
									(10)
	$\pm\infty$ (7	$\sin \pi / 4$ (6	1 (5	5 (4	0 (3	9 (2	28 (1		

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים:

$$\lim = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

פרק 4 - רציפות ומשפט ערך הביניים

רציפות

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" * שלהן :
(בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.
למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x=0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x+x^2} & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} ax+b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (4) \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיפים 3 ו-4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל .

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא. (5) הוכח או הפרך:

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.
 3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
 4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.
- (6) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f+g$ רציפה? הוכח את טענתך.

משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית.

(8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד:

$$x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3)$$

(9) הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

(10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות:

$$4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(11) תהי f פונקציה רציפה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

(12) מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

$$(13) \text{ נגדיר } f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$$

א. חשב $f(0), f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע $(0, 2)$.

פתרונות:

- (1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנקי': $x=0,1$, לא רציפה בנקודה $x=2$. (6) רציפה בנקי' $x=1$. לא רציפה בנקי' $x=2$. (2) (1) $k=1$. (2) $k=4$.
- (3) $k=\frac{2}{3}$. (4) $k=-1$. (3) (1) $a=0, b=\frac{1}{2}$. (2) $a=1, b=2$ או $a=2, b=1$.
- (3) $a=-2e^{-1}, b=e^{-1}$. (4) $a=e/3, b=-e/3$. (4) (1) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג ראשון. (6) סליקה. (12) $[0.1,1]$. (13) א. $f(0)=-1, f(2)=5$. ב. לא.

פרק 5 – סדרות:**סדרה חשבונית:****1. נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

3. נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה

הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: $S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}$.

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4\frac{1}{2}, 7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}, \dots, 49\frac{1}{2}$.
- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.

9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$

הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5 = 0$.

ב. נתון: $a_3 - a_1 = 24$. מצא את: a_1 ואת d .

ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.

מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

11) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.

12) נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$

כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

13) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$

כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

15) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 13, 22, 31, \dots$

בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

16) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \dots, 599$

מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

17) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

18) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

- א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

19) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7 וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

- א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
 ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

20) נתונים שני טורים חשבוניים: $150, 144, 138, \dots$ ו- $90, 93, 96, \dots$

- לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.
 א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.
 ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480.
 מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

21) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2 . ידוע כי: $d_1 = -2d_2$.

- סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .
 א. מצא את הפרש הסדרה $d_1 - a_n$.
 ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} . מצא את a_1 ואת b_1 .

22) נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$.

- בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

23) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612.
 הוכח כי $nd = 60$.

24) בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה

פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

כמה איברים יש בסדרה?

- 25) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.
- מצא את x .
 - מצא את הפרש הסדרה.
 - ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .
 - האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.
- מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

- 26) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.
- הוכח את הטענות הבאות:
 - $a_1 = -4d$
 - $S_9 = 0$
 - האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצא את a_1 ואת d .
 - מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

- 27) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-6 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- הוכח כי $dn = 66$.
 - ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.
 - סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

תשובות סופיות:

- 1) $a_{43} = -235$ (2) $d = 4, a_1 = -5$ (3) 20 איברים (4) 48 איברים (5) 15 קפיצות.
 6) 58 מספרים (7) 31 איברים חיוביים (8) $x = 1, x = 4$ (9) $a_{19} = 59$
 10) ב. $d = -3, a_1 = 12$ ג. $b_5 = -3$ (11) $S_{14} = 413$ (12) 21 איברים. (13) 16 דקות.
 14) 37 איברים. (15) 3647 (16) 23920 (17) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
 18) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$
 19) א. $d = -6, a_1 = 50$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$ (20) א. $n = 81$ ב. $n = 16$
 21) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$ (22) זוגיים: $S = 135$ זוגיים: $S = 99$
 24) 29 איברים. (25) א. 1. $d = 11$ 2. $x = -50$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
 26) ב. $a_1 = -8, d = 2$ ג. $n = 36$ (27) ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$

סדרה הנדסית:

1. נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה הנדסית:

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

3. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ : הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י:}$$

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.
- (2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$.
- (3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצא גם את מנת הסדרה: $x-6, x+4, 4x+1$.

8) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \dots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) המספרים: $2x-3, x-9, x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.
א. מצא את x .

ב. 1. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.

2. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.

ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$. מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

15 נתונה הסדרה הבאה: a_n , 4 , 12 , 36 , \dots . מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישיית

מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין

סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

16 נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$.

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

17 בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

18 נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.

בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

19 בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

20 א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

21 בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. מצא את מנת הסדרה.

ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

22 באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה: תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה... המלך הסכים להצעה.

- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
 ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
 ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

תשובות סופיות:

- (1) $a_9 = 729$ (2) $n = 7$ (3) $a_1 = \pm \frac{1}{4}$, $q = \pm 2$ (4) $a_1 = \frac{2}{3}$, $q = \pm 3$.
- (5) $a_1 = \frac{1}{25}$, $q = 5$ (6) 5 דקות. (7) $x = 11 \rightarrow q = 3$, $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}$.
- (8) $a_8 = 384$ (9) $S_9 = 2555$ (10) 5 דקות. (11) $n = 12$ (12) $q = 2$ (13) $n = 6$.
- (14) א. $x = 14$. ב. 1. $a_n = 5^{n-1}$. 2. a_6, a_7 . ג. $S_7^* = 61,034,375$.
- (15) א. $q = 3$. ג. b_5, b_6 (16) אי-זוגיים: $S = 595$: זוגיים: $S = 1190$ (17) $q = 4$.
- (18) $\frac{q+1}{q}$ (19) $a_1 = \frac{3}{8}$ (20) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$. ב. $a_n = 3^{n-1}$. ג. a_5, a_6 .
- (21) א. $q = 2$. ב. $a_1 = 1$. ג. $S_{6(p)} = 2730$.
- (22) א. $a_{25} = 16,777,216$. ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו 20,000,000 אבנים ג. $4,16,64, \dots, 2^{24}$, $S_n = 22,369,620$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

1. הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

2. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש

בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$. S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

3. סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית

$$. S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה:}$$

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן

$$. S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{הבא:}$$

שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

*הערה: שתי השאלות הבאות מסכמות את סוגי הסכומים וייצוג סדרות שונות באמצעות סדרה נתונה כפי שמקובל בנושא זה ואינן מייצגות אורך של שאלת בגרות.

(5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n שמנתה q , $(q \neq 0, |q| < 1)$. מגדירים שלוש סדרות חדשות: b_n, c_n ו- d_n באופן הבא:

d_n	c_n	b_n	הסדרה:
$d_1 = S_a + a_1$	$c_1 = a_2^2 - a_1^2$	$b_1 = a_1$	הכלל:
$d_2 = S_a + a_2$	$c_2 = a_3^2 - a_2^2$	$b_2 = a_1 + a_2$	
$d_3 = S_a + a_3$	$c_3 = a_4^2 - a_3^2$	$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$	
\vdots	\vdots	\vdots	
$d_n = S_a + a_n$	$c_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$	$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_{a(n)}$	

הסכום S_a הוא סכום הסדרה a_n , והסכום $S_{a(n)}$ הוא סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n .

- א. קבע אלו מבין הסדרות b_n, c_n ו- d_n הן הנדסיות והבע את מנתן ע"י q .
- ב. הבע באמצעות a_1 בלבד את סכום הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף הקודם.
- ג. מסמנים את סכום ריבועי האיברים של הסדרה ההנדסית שמצאת בסעיף אי' ב- $S_{(s)}$. הוכח כי לא קיים ערך של q עבורו סכום ריבועי האיברים $S_{(s)}$ שווה לסכום הסדרה הנ"ל בריבוע.

6) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_n שמנתה q . מגדירים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = S_1^* = \frac{a_1}{1-q}, b_2 = S_2^* = \frac{a_2}{1-q}, b_3 = S_3^* = \frac{a_3}{1-q}, \dots, b_n = S_n^* = \frac{a_n}{1-q}, \dots$$

כאשר: S_n^* מייצג את סכום הסדרה a_n החל מהאיבר a_n (ועד אינסוף).

- הוכח כי הסדרה b_n היא גם הנדסית אינסופית יורדת וכתוב את נוסחת האיבר הכללי שלה באמצעות a_1 ו- q .
- ידוע כי סכום הסדרה b_n הוא 126 וכי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה a_n גדול פי 6560 מהאיבר התשיעי בסדרה b_n . מצא את a_1 ו- q .
- היעזר בסעיף הקודם והוכח כי מתקיים: $b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = 42$.
- חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n .
- חשב את סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n .
- מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^* . חשב את סכום הסדרה b_n^* .
- מחליפים את סימני האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה b_n כך שנוצרת הסדרה: b_n^{**} . חשב את סכום הסדרה b_n^{**} .
- מעלים בריבוע את כל איברי הסדרה b_n . מסמנים את הסכום המתקבל ב- $S_{(s)}$ (מלשון: square). כמו כן, מסמנים את סכום הסדרה המקורית b_n ב- S_b . הראה כי: $S_b^2 \neq S_{(s)}$.
- הוכח כי היחס בין סכום איברי הסדרה a_n וסכום איברי הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

*הערה: השאלות הבאות הינן שאלות מסכמות ברמת בגרות:

7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.

- הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
- ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32. מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

8) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות

האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

- מצא את מנת הסדרה.
- מחברים כל שני איברים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
- הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
- הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
- סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

- 9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , ($0 < q < 1$).
 נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10}, \dots$, $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$.
 נתון כי: $T = 6V$.
 א. מצא את מנת הסדרה q .
 ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
 ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

- 10) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .
 בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא:
 $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.
 א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
 בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 ב. מצא את מנת הסדרה.
 ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו. ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

- 11) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , ($q \neq 0, |q| < 1$).
 נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}, \dots$, $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.
 נתון כי: $V = 0.3T$.
 א. מצא את מנת הסדרה q .
 מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
 ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$S = 18 \frac{2}{3} \quad (4) \quad q = \frac{4}{5}, a_1 = 12 \frac{1}{2} \quad \text{או} \quad q = \frac{1}{5}, a_1 = 50 \quad (3) \quad a_1 = 24 \quad (2) \quad S = 18 \quad (1)$$

(5) א. הסדרה b_n :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{\frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{q-1}}{\frac{a_n(q^n-1)}{q-1}} = \frac{a_{n+1}(q^{n+1}-1)}{a_n(q^n-1)} = q \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q^n-1}$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2}{a_{n+1}^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^4 - a_n^2 q^2}{a_n^2 q^2 - a_n^2} = \frac{a_n^2 q^2 (q^2 - 1)}{a_n^2 (q^2 - 1)} = q^2$$

הסדרה: c_n הנדסית: q^2 הסדרה d_n :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{S + a_{n+1}}{S + a_n} = \frac{\frac{a_1}{1-q} + a_{n+1}}{\frac{a_1}{1-q} + a_n} = \frac{a_1 + (1-q)a_{n+1}}{a_1 + (1-q)a_n} = \frac{a_1(1 + (1-q)q^n)}{a_1(1 + (1-q)q^{n-1})} = \frac{q^n - q^{n+1} + 1}{q^{n-1} - q^n + 1}$$

היות והיא תלויה ב- n היא אינה הנדסית.

$$S_{(c_n)} = \frac{c_1}{1-q_c} = \frac{a_2^2 - a_1^2}{1-q^2} = \frac{a_1^2(q^2-1)}{1-q^2} = -a_1^2$$

ג. מההשוואה: $S_{(s)} = S^2$ מקבלים כי פתרון המשוואה הוא: $q = 0, \pm 1$.

כולם נפסלים מכיוון שמנת הסדרה הנתונה היא שבר.

עבור $|q| > 1$ הסדרות אינן מתכנסות ולכן לא קיים ערך של q עבורו השיוויון יתקיים. מש"ל.

$$(6) \text{ א. } b_n = \frac{a_1}{1-q} q^{n-1}, q = \frac{1}{3}, a_1 = 56, \text{ ד. } 31.5, \text{ ה. } 94.5, \text{ ו. } 63, \text{ ז. } 63$$

$$\text{ח. } 7938 \text{ ט. הסכום: } S^2 \text{ משמעו: } (b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots)^2$$

הסכום: $S_{(s)}$ משמעו: $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + \dots$. ברור כי הביטויים אינם שווים.

$$(7) \text{ ב. } a_1 = 16, q = \frac{1}{3}, \text{ א. } q = 0.6, \text{ ב. } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2, \text{ ד. } a_1 = 200$$

$$(9) \text{ א. } q = \frac{1}{2}, \text{ ב. פי } 5, \text{ ג. } a_1 = 1024, \text{ (10) ב. } q = 0.5, \text{ ג. } a_5 = 20$$

$$(11) \text{ א. } q = \frac{1}{3}, \text{ ב. } a_1 = -16, \text{ ג. } S = 288$$

סדרת נסיגה:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.
 ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12} .
 ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k . הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30} .
 ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 113.
 ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = a_n + 6n - 2.$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1 .

$$(5) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4.$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1 .

$$(6) \quad \text{סדרה מוגדרת ע"י הכלל: } a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5.$$

מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5 .

ג. חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.

7) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.

- הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
- הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
- חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

8) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.

$$b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$$

- הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.
- חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$.

9) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה:

לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה:

לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם.
ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

- כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.
- מה מחיר הרכב?

10) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.

- חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
- הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
- כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
- חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.

11) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.

- א. 1. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .
 2. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.
 ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.
 חשב את הסכום הבא: $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.
 ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

12) סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

- מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.
 א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.
 ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.
 ג. חשב את הסכום הבא: $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

תשובות סופיות:

- 1) א. $a_3 = -22$. ב. $a_{12} = 5, a_{14} = 33$. ג. $a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51$. ד. a_{62}, a_{63} .
- 2) $a_{k+2} = 74 + 4k$ (3) $t = -33$ (4) $d = 6$. א. $b_1 = 4$. ב. $b_1 = 4$ (5) $q = 3$. ב. $a_1 = 0$.
- 3) $b_{n+1} = 3b_n$. ב. $b_5 = 648$. ג. $S = 1594320$.
- 4) א. $a_1 = k, a_2 = 11 - k, a_3 = k + 8, a_4 = 19 - k$. ב. 8. ג. 830.
- 5) ב. $S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3}$ (9) א. 12 לפני הראשונה ו-8 לפני השנייה. ב. 45,000.
- 6) א. $a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7$. ג. $S_{9(o)} = 117$. ד. $S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n$.
- 7) א. 1. $a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4$. 2. a_4 . ב. $S_{6-11} = 265458$. ג. $a_1 = 5$.
- 8) א. $q = 2.5$. ב. $b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$. ג. $S_{10}^* = -4086.74$.

פרק 6 – סדרות נוספות

(1) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \quad (21) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \quad (20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^n \quad (24) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2-1} \quad (23) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n \quad (27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 2} \right)^{10n} \quad (26) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 4} \right)^{4n^2} \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (29) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (33) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (32) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (31)$$

הערה חשובה מאוד !

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n , המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי ! בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה במקום סדרה.

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \quad (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} \quad (6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2n} \quad (5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} \quad (9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} \quad (8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{4}{n}\right) \quad (7)$$

$$4^n \sin \frac{1}{n} \quad (12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n \quad (11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2} \quad (10)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \quad (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} \quad (3)$$

* רמזים : סעיף 1 - $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$. סעיף 2 - הוכח כי $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(4) בתרגילים הבאים נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), a_1 = 2 \quad (3) \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, a_1 = 2 \quad (2) \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, a_1 = \sqrt{2} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, a_1 = 1, a_2 = 1 \quad (5)$$

א. 1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי: $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. הוכח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשב אותו.2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.ב. 1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

2. ענה שוב על סעיף א.1. בעזרת הביטוי הסגור שמצאת.

3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף הקודם הוא אכן נכון.

(6) על סמך ההגדרה של גבול של סדרה הוכח כי :

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{ג.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ב.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{4n + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad \text{ו.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad \text{ה.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ד.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad \text{ט.} & \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad \text{ח.} & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad \text{ז.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad \text{יב.} & \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad \text{יא.} & \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n + 5) = \infty \quad \text{י.} \end{array}$$

(7) הוכח או הפרך :

- (1) אם a_n סדרה חסומה אז יש לה גבול.
- (2) אם b_n סדרה לא חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.
- (3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$.
- (4) אם d_n סדרה עולה אז היא לא חסומה.
- (5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.
- (6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.
- (7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.
- (8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.
- (9) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L}$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L$.
- (10) אם $a_n < b_n$ לכל n אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (11) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ואם b_n חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.
- (12) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k$ ואם $a_n < 1$ לכל n אז $k < 1$.
- (13) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1$.

פתרונות:

- (1) (1) 0 (2) 4 (3) ∞ (4) 0 (5) -5 (6) 1 (7) 1.5 (8) $\frac{1-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ (9) 0.25 (10) 4 (11) 2
- (12) $\ln 3$ (13) $e^{1/3}$ (14) $(b \neq 0) \Leftrightarrow (\lim a_n = \sqrt[3]{a/b}) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0) \Leftrightarrow (\lim a_n = \infty)$
- (15) $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0) \Leftrightarrow (a - b = 0) \Leftrightarrow (a = b)$
- (16) $\frac{k}{2}$ (17) 0.5 (18) 0.5 (19) $\frac{a-b}{2}$ (20) $e^{0.5}$
- (21) 1 (22) e^{-1} (23) e^3 (24) e^{-12} (25) e^{30} (26) e (27) 0 (28) 0 (29) 0 (30) 0.75 (31) 3
- (32) $\frac{3}{4}$ (33) 4 (34) 1 (35) 0 (36) 0 (37) 0 (38) 0 (39) 0 (40) 0 (41) 0 (42) 0 (43) 0 (44) 0 (45) 0 (46) 0 (47) 0 (48) 0 (49) 0 (50) 0
- (10) אין גבול. (11) אין גבול. (12) ∞ (13) 1 (14) 1 (15) 0 (16) 1 (17) 1 (18) 1 (19) 1 (20) 1 (21) 1 (22) 1 (23) 1 (24) 1 (25) 1 (26) 1 (27) 1 (28) 1 (29) 1 (30) 1 (31) 1 (32) 1 (33) 1 (34) 1 (35) 1 (36) 1 (37) 1 (38) 1 (39) 1 (40) 1 (41) 1 (42) 1 (43) 1 (44) 1 (45) 1 (46) 1 (47) 1 (48) 1 (49) 1 (50) 1
- (2) הגבול 1. (3) הגבול 1. (5) א.1. הגבול $\frac{1}{3}$. ב.1. הגבול $\frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$

לפתרון מלא בסרטון ודאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

פרק 7 - פונקציה ממשית

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \quad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \quad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \quad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \quad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \quad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \quad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות: $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x-4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :

$$h(h(x)) \quad (6) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(1)) \quad (1)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה

ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואיזה זוגיות :

$$y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = 1 \quad (3) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 4x^3 \quad (1)$$

$$y = \sin x \cdot \cos x \quad (8) \quad y = \ln x + x^2 \quad (7) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = \sin^2 x \quad (4) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = 5 + 3 \sin(4x+1) \quad (2) \quad y = 2 \sin x \quad (1)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = |x-2| \quad (1)$$

* יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

פתרונות:

$x \neq 2, -1$ (5)	$x \neq 0, 1, -1$ (4)	x כל (3)	$x \neq \pm 2$ (2)	x כל (1)
$x < -2$ או $x > 1$ (10)	$-1 < x < 1$ (9)	x כל (8)	$x \leq -2$ או $x \geq 1$ (7)	$x \geq 4$ (6)
$x \neq \frac{\pi}{4} \cdot k$ (15)	$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k$ (14)	$0 < x \neq 1$ (13)	x כל (12)	$0 < x \neq 1$ (11)
		$-2 < x < 0$ (18)	$3 < x < 5$ (17)	x כל (16)

(2)

x (6)	$x - 8$ (5)	$\frac{4}{x-4}$ (4)	$x^2 - 4$ (3)	4 (2)	-3 (1)
---------	-------------	---------------------	---------------	---------	----------

(3)

$y \neq 3$, $f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3}$ (3)	$y \neq 1$, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$ (2)	y כל , $f^{-1}(x) = 3x+1$ (1)
		$y \geq -4$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}$ (4)

(4)

זוגיות - 2,3,5,8 אי זוגיות - 1,4 כלליות - 6,7

(5)

π (4)	3π (3)	$\frac{\pi}{2}$ (2)	2π (1)
-----------	------------	---------------------	------------

(6)

$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases}$ (2)	$y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$ (1)
--	---

$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ (4)	$y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases}$ (3)
---	---

פרק 8 – משוואות מסוגים שונים**משוואה ממעלה ראשונה**

• בסרטון זה מוסבר מהי משוואה.

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & 6x+2=8 & \text{ב.} & 7-2x=7 & \text{ג.} & 2x+x=24 \\ \text{ד.} & 2x+6=8+x & \text{ה.} & -7x+5+2x=4x-13 & \text{ו.} & 6x-3+5-7x=x-5x-7 \\ \text{ז.} & 2-5x+7=-3x+8 & & & & \end{array}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & 3(x-1)-4=2 & \text{ב.} & 7x-4(3-4x)=-x & \text{ג.} & 6(4-x)-(6-x)=3x \\ \text{ד.} & 5x-(3x-7)4=21 & \text{ה.} & x(x-5)=x^2-7x+8 & \text{ו.} & (7-x)(1-x)-(x-3)^2=0 \end{array}$$

פתרונות

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$ ז. $x=\frac{1}{2}$ א. $x=3$ (2)

ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$

שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases} & \text{ג.} & \begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases} \\ \text{ד.} & \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases} & \text{ה.} & \begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases} & & \end{array}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases} \\ \text{ג.} & \begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases} \end{array}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{ב. } \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases}$$

$$\text{א. } \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{ב. } \begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases}$$

$$\text{א. } \begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\text{ג. } \begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases}$$

5. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{ב. } 5x - 3 + x = 4x + 2x - 3$$

$$\text{ד. } \begin{cases} 2(x-y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x-y) \end{cases}$$

$$\text{א. } 6(x-2) = 2x + 5 + 4x$$

$$\text{ג. } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases}$$

6. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{ב. } \begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases}$$

$$\text{א. } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases}$$

פתרונות

1 א. (2,5) ב. (4,-2) ג. (0,1) ד. (-2,3) ה. (-7,-10) ו. x = -3 ז. x = $\frac{1}{2}$

2 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2) 3 א. (1,1) ב. (-3,1) ג. (1,1) 4 א. (-1,-3) ב. (2,10)

ג. (-2,4) 5 א. אין פתרון ב. אינסוף פתרונות ג. אין פתרון למערכת המשוואות ד. אינסוף

פתרונות 6 א. $\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5}, 9\right)$

משוואה ממעלה שנייה

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } x^2 - 36 = 0 \quad \text{ב. } 32x^2 - 18 = 0$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } -7x^2 - 14x = 0 \quad \text{ב. } 5x^2 - x = 0$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \text{ב. } -x^2 + 10x - 16 = 0$$

$$\text{ג. } 25x^2 - 20x + 4 = 0 \quad \text{ד. } 2x^2 - 6x + 5 = 0$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 3 \quad \text{ב. } -x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$$

$$\text{ג. } 2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$$

פתרונות

$$(1) \text{ א. } x = \pm 6 \quad \text{ב. } x = \pm \frac{3}{4} \quad (2) \text{ א. } x_1 = 0, x_2 = -2 \quad \text{ב. } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$$

$$(3) \text{ א. } x_1 = 2, x_2 = -5 \quad \text{ב. } x_1 = 2, x_2 = 8 \quad \text{ג. } x = \frac{2}{5} \quad \text{ד. אין פתרון למשוואה}$$

$$(4) \text{ א. } x_1 = 0, x_2 = 1 \quad \text{ב. } x_1 = -1, x_2 = -1\frac{1}{4} \quad \text{ג. } x_1 = 1, x_2 = -10$$

משוואות עם מכנה

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4 \quad \text{ב. } \frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$$

$$\text{ג. } \frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15} \quad \text{ד. } \frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$$

$$\text{ה. } \frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2 \quad \text{ו. } 5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 \quad \text{ב. } \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0$$

$$\text{ג. } \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} \quad \text{ד. } \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2}$$

$$\frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} \quad \text{ה.}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4x^2 - 24x + 36}{x-3} = 12 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 \quad \text{ג.}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \quad \text{ג.}$$

פתרונות

- 1) א. $x = -18$ ב. $x = -30$ ג. $x = -1$ ד. $x = 1$ ה. $x = -10$ ו. $x = -21$ ז. $x = 8$ ח. $x = -7$
 2) א. $x = -7$ ב. $x = -6$ ג. $x = -7$ ד. $x = -3$ ה. $x = -2$ ו. $x = 2$ ז. $x = 2$ ח. $x = -7$
 3) א. $x = 6, x \neq 3$ ב. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$ ג. $x = 5, x \neq -3$ ד. $x_1 = 0, x_2 = -5$

משוואות ממעלה שלישית ומעלה

1. פתור את המשוואה $5x^4 + 3x^2 - 8 = 0$.

2. פתור את המשוואה $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$.

3. פתור את המשוואה $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.

4. פתור את המשוואה $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$.

פתרונות

1) (1) $x = \pm 1$ (2) $x = \pm 1$ (3) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$ (4) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2\frac{1}{2}$

משוואות מעריכיות

- בסרטון זה הסבר על חוקי החזקות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות עם חיבור וחסור.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x} \quad .2$$

$$(25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \quad .1$$

$$\sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \quad .3$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2x}{3}-2} \quad .ב$$

$$3^x = 5^x \quad .א$$

$$.e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x} \quad .5$$

6. פתור את המשוואות הבאות:

$$2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227 \quad .ב$$

$$5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162 \quad .א$$

$$.5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145 \quad .7$$

$$.e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1 \quad .8$$

$$.2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \quad .9$$

10. פתור את המשוואות הבאות:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3} \quad .ב$$

$$6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0 \quad .א$$

11. פתור את המשוואות הבאות:

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad .ב$$

$$.א \quad \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

12. פתור את המשוואה $e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$.

פתרונות

- (1) $x=1$ (2) $x=-2$ (3) $x=-\frac{1}{2}$ (4) $x=0$ (5) $x=3$ (6) $x_1=1, x_2=\frac{1}{6}$ (7) $x=1$ (8) $x=-2$ (9) $x=-1$ (10) $x=\pm 1$ (11) $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$ (12) $x=0$ (13) $x=0$ (14) $x_1=0, x_2=1$

משוואות לוגריתמיות

- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלוגריתמים.
- בסרטונים 2-4 הסבר על כללי הלוגריתמים.
- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלן.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 1.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 2.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 3.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 4.

1. מצא את ערכו של x :

- א. $\log_{36} 6 = x$
 ב. $\log_2 x = 16$
 ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$
 ד. $\log_x 64 = 3$
 ה. $\log_x 25 = 2$
 ו. $\log_x (3x+4) = 2$
 ז. $\ln x = 2$
 ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

2. פתור את המשוואות הבאות:

- א. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$
 ב. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

3. פתור את המשוואות הבאות:

- א. $\log_5 (25^x - 20) = x$
 ב. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$

4. פתור את המשוואה $\log_4 x + \log_x 4 = 2\frac{1}{2}$.

לפתרון מלא בסרטון ודאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - גיא סלומון ©

5. פתור את המשוואות הבאות:

$$\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \quad \text{ב.}$$

$$\log x \cdot \log(10x) = 2 \quad \text{א.}$$

6. פתור את המשוואות הבאות:

$$x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{ב.}$$

$$x^{\log_5 x} = \frac{25}{x} \quad \text{א.}$$

7. מצא את ערכו של x :

$$5^x = 8 \quad \text{ב.}$$

$$2^x = 5 \quad \text{א.}$$

$$e^x = \frac{1}{2} \quad \text{ד.}$$

$$e^x = 2 \quad \text{ג.}$$

$$e^x = -1 \quad \text{ה.}$$

$$8. \text{ פתור את המשוואה } \frac{\log_2 x - 6}{x^4} = \frac{4}{x}$$

$$9. \text{ פתור את המשוואה } \frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$$

$$10. \text{ פתור את המשוואה } \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

פתרונות

1) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$ ה. $x = 5$ ו. $x = 4$ ז. $x = e^2$

ח. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 2) א. $x = 3$ ב. $x = 3$ 3) א. $x = 1$ ב. $x = 0$ 4) $x_1 = 16, x_2 = 2$

5) א. $x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = 10$ ב. $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, x_2 = \frac{1}{e}$ 6) א. $x_1 = \frac{1}{25}, x_2 = 5$

ב. $x_1 = e^3, x_2 = \frac{1}{e^2}$ 7) א. $x = 2.322$ ב. $x = 1.292$ ג. $x = 0.693$ ד. $x = -0.693$

ה. אין פתרון 8) $x_1 = 16, x_2 = \frac{1}{4}$ 9) $x = 3$ 10) $x_1 = \sqrt{e}, x_2 = e$

משוואות עם פרמטרים

1. פתור את המשוואה הבאה: $mx - 3m = 5x + 1$

2. פתור את המשוואה הבאה: $\frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$

$$3. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } (x-2a)(x-2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2)$$

$$4. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } \frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$$

$$5. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } \frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$$

$$6. \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$$

$$7. \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$

$$8. \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases}$$

$$9. \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases}$$

$$10. \text{ פתור את מערכת המשוואות הבאה: } \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x - (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases}$$

$$11. \text{ פתור את המשוואה הבאה: } x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

12. פתור את המשוואה הבאה: $x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3$

13. פתור את המשוואה הבאה: $x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x$

14. פתור את המשוואה הבאה: $\frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0$

15. פתור את המשוואה הבאה: $(m^2 + 1)x^2 - m^2x - 1 = 0$

16. פתור את המשוואה הבאה: $\frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b$

17. פתור את המשוואה הבאה: $x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$

פתרונות

(1) $x = \frac{3m+1}{m-5}$ (2) $x = \frac{a^2+9}{6a}$ (3) $x = a+b$ (4) $x = -m$ (5) $x = a+1$

(6) $(m+1, -1)$ (7) $\left(\frac{2a-4}{a^2-1}, \frac{4a-2}{a^2-1}\right)$ (8) $\left(m^2 - m + 1, \frac{m-1}{m}\right)$ (9)

(10) $(2m+1, m-2)$ (11) $(2a+b, 2a-b)$ (12) $x = a-1, 3-a$

(13) $x = m-5, -2m$ (14) $x = \pm a\sqrt{3}$ (15) $x = 1, -\frac{1}{m^2+1}$ (16) $x = \frac{a}{b}, -ab$

(17) $x = \frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$

משוואות עם שורשים

1. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{4x-3} = 5$

2. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x+2} = x$

3. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{3x+1} + x = 13$

4. פתור את המשוואה הבאה: $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$

5. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$

6. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$

7. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$

8. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$

9. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$

10. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$

11. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$

12. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$

$$3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2} \quad \text{.13 פתור את המשוואה הבאה:}$$

פתרונות

$$x=7 \text{ (1) } x=2 \text{ (2) } x=8 \text{ (3) } x=5 \text{ (4) } x=6 \text{ (5) } x=4, -3 \text{ (6) } x=3 \text{ (7) } x=5 \text{ (8) } x=12 \text{ (9) } x=2, 2\frac{8}{9} \text{ (10) } x=6 \text{ (11) } x=1 \text{ (12) } x=2 \text{ (13)}$$

משוואות עם ערך מוחלט

$$|2x-11|=7 \quad \text{.1 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|3x-24|=x \quad \text{.2 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|12-x|=3x \quad \text{.3 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$2x-|8-x|=10 \quad \text{.4 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|4x-5|=|2x+13| \quad \text{.5 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|14-3x|=2|x+5| \quad \text{.6 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|x|+7=|2x| \quad \text{.7 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|x+2|+6=|2x-4| \quad \text{.8 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|x+2|+|2x-6|=|4x+8| \quad \text{.9 פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$|10 - 3x| - |x + 4| = |2x - 6| \quad \text{.10 פתור את המשוואה הבאה:}$$

פתרונות

$$x = 24, \frac{4}{5} \quad \text{(6)} \quad x = 9, -1\frac{1}{3} \quad \text{(5)} \quad x = 6 \quad \text{(4)} \quad x = 3 \quad \text{(3)} \quad x = 6, 12 \quad \text{(2)} \quad x = 2, 9 \quad \text{(1)}$$

$$x = 0 \quad \text{(10)} \quad x = 0, -12 \quad \text{(9)} \quad x = 12, -1\frac{1}{3} \quad \text{(8)} \quad x = \pm 7 \quad \text{(7)}$$

מערכת משוואות ממעלה שנייה

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \text{.1 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases} \quad \text{.2 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases} \quad \text{.3 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases} \quad \text{.4 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases} \quad \text{.5 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad \text{.6 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases} \quad \text{.7 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad \text{.8 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{.9 פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{10. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad \text{11. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad \text{12. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad \text{13. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad \text{14. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

פתרונות

$$(5, -2), (-5, 2) \quad \text{(4)} \quad (\pm 2, \pm 1) \quad \text{(3)} \quad (\pm 4, -2) \quad \text{(2)} \quad (2, 4), (4, 2) \quad \text{(1)}$$

$$(7, 4) \quad \text{(7)} \quad \left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1) \quad \text{(6)} \quad \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right) \quad \text{(5)}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad \text{(11)} \quad (6, 5), (-5, -6) \quad \text{(10)} \quad (3, 6), (6, 3) \quad \text{(9)} \quad (5, -3) \quad \text{(8)}$$

$$(7, 4), (-4, -7) \quad \text{(13)} \quad (4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3) \quad \text{(12)}$$

$$(5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5) \quad \text{(14)} \quad (-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65)$$

מערכת משוואות מעריכיות

$$\begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases} \quad \text{1. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases} \quad \text{2. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases} \quad .3 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases} \quad .4 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases} \quad .5 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases} \quad .6 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases} \quad .7 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

פתרונות

(1) (2, 9) (2) (0, 2), (2, 4) (3) (1, 2) (4) (1, 3) (5) (3, 2) (6) (-1, -2) (7) (1, 2), (-1, 0)

מערכת משוואות לוגריתמיות

1. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases}$$
2. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6 (2y - 2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y - 1 \end{cases}$$
3. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \log_3 (x + y) = \log_3 (4x + y) - 2 \\ \log_5 (5x + 3y) = 2 \end{cases}$$
4. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \log_2 (\log_3 (x - y)) = 1 \\ \log_5 (x + y - 11) = \log_{25} x + \frac{1}{2} \log_5 (y + 2) \end{cases}$$
5. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \log_5 x + 6 \log_4 y = 11 \\ 10 \log_5 x - 2 \log_4 y = 17 \end{cases}$$
6. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases}$$
7. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases}$$
8. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases}$$
9. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1 (2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases}$$

פתרונות

$$\left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) \quad (25, 8) \quad (5) \quad (16, 7) \quad (4) \quad (8, -5) \quad (3) \quad (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) \quad (8, 3) \quad (1)$$

$$(4, 7) \quad (9) \quad (3, 9), (9, 3) \quad (8) \quad (25, 4), (625, 2) \quad (7)$$

מערכת משוואות מעריכיות לוגריתמיות

$$\begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad .1 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad .2 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 3y + 5\log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad .3 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad .4 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad .5 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad .6 \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

פתרונות

$$(1, 1), (2, 3) \quad (5) \quad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4) \quad (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \quad (3) \quad (3, 3) \quad (2) \quad (1, 1) \quad (1)$$

$$(1, 0) \quad (6)$$